PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2015/2016

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.9. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\|\|x+1\|-2\|=3$, $\|x+3\|+\|x-5\|>12$.	**A**

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym. POZIOM PODSTAWOWY 1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. 5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	**C**

Zadanie 3. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.	**D**

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.2. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	**C**

Zadanie 5. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.	**B**

Zadanie 6. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Odpowiedź

2	**2**	**5**

Zadanie 7. (0–2)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenie: P_n – pole n-tego kwadratu. Zauważmy, że każdy następny kwadrat jest podobny do poprzedniego w skali $k = \frac{2}{3}$, więc stosunek pól każdych dwóch kolejnych kwadratów jest stały i równy $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym możemy obliczyć następująco: $P = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \ldots$.

Jest to szereg geometryczny zbieżny, w którym $a_1 = P_1 = \left(3\sqrt{13}\right)^2 = 117$ oraz $q = -\frac{4}{9}$.

Zatem $P = \frac{P_1}{1-q} = \frac{117}{1+\frac{4}{9}} = 81$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy obliczy pole pierwszego kwadratu $P_1 = 117$ i zauważy, że pole każdego następnego kwadratu stanowi $\frac{4}{9}$ pola kwadratu poprzedniego.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym $P = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \ldots = 81$.

<u>II sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenie: P_n – pole n-tego czarnego sześciokąta. Wtedy

$P_1 = P_{A_1B_1C_1C_2B_2A_2} = \left(3\sqrt{13}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{13}\right)^2 = 65$.

Zauważmy, że każdy następny sześciokąt czarnego koloru jest podobny do poprzedniego w skali $k = \frac{4}{9}$, więc ich pola tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $q = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$. Zatem pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym możemy obliczyć następująco: $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots$.

Jest to szereg geometryczny zbieżny, w którym $a_1 = P_1 = 65$ oraz $q = \frac{16}{81}$.

Zatem $P = \frac{P_1}{1-q} = \frac{65}{1-\frac{16}{81}} = 81$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy obliczy pole pierwszego czarnego sześciokąta $P_1 = 65$ i zauważy, że pole każdego następnego czarnego sześciokąta stanowi $\frac{16}{81}$ pola poprzedniego.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

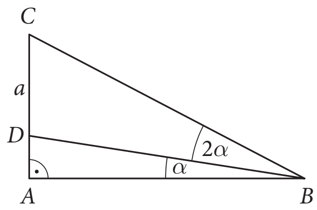
gdy obliczy pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym $P = 81$.

Zadanie 8. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	6.5. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów. 7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>



Zauważmy, że $|\sphericalangle ABC| = 90° - 3\alpha$.

Z twierdzenia sinusów w trójkącie DAB otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{\sin(90° - 3\alpha)} = \frac{|BD|}{\sin 2\alpha}$$

Stąd:

$$|AD| = \frac{a \cdot \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = a\frac{\cos(2\alpha + \alpha)}{\sin 2\alpha} = a\frac{\cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$|AD| = a\frac{\cos\alpha(\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = a\frac{1 - 2\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$|AD| = \frac{a(1 - 4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$$

co kończy dowód.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający zastosuje twierdzenie sinusów w trójkącie DAB i zapisze równość $\frac{|AD|}{\sin(90° - 3\alpha)} = \frac{|BD|}{\sin 2\alpha}$.

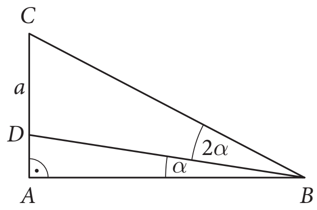
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zastosuje wzory na cosinus sumy kątów, sinus i cosinus podwojonego kąta i zapisze np. równość $|AD| = a\frac{1 - 2\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przekształci wyrażenie do postaci $|AD| = \dfrac{a(1-4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$.

II sposób



Korzystamy z funkcji tangens w trójkątach prostokątnych *CAD* i *CAB*:

$$\text{tg}\alpha = \frac{|CD|}{|CA|},\ \text{stąd}\ |CD| = |CA| \cdot \text{tg}\alpha$$

$$\text{tg}3\alpha = \frac{|BC|}{|CA|},\ \text{stąd}\ |BC| = CA \cdot \text{tg}3\alpha$$

$$|BD| = |BC| - |CD| = |CA| \cdot (\text{tg}3\alpha - \text{tg}\alpha)$$

Przekształcamy wyrażenie

$$\text{tg}3\alpha - \text{tg}\alpha = \frac{\sin3\alpha}{\cos3\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin3\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos3\alpha}{\cos3\alpha \cdot \cos\alpha}.$$

Stosujemy wzór $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ i upraszczamy dalej powyższe wyrażenie:

$$\text{tg}3\alpha - \text{tg}\alpha = \frac{\sin2\alpha}{\cos3\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos3\alpha}$$

Wracamy do odcinka *BD*:

$$a = |BD| = |CA| \cdot (\text{tg}3\alpha - \text{tg}\alpha) = |CA| \cdot \frac{2\sin\alpha}{\cos3\alpha}$$

Stąd

$$|CA| = a \cdot \frac{\cos3\alpha}{2\sin\alpha}$$

Wyznaczamy teraz długość odcinka *CD*:

$$|CD| = |CA| \cdot \text{tg}\alpha = a \cdot \frac{\cos3\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = a \cdot \frac{\cos3\alpha}{2\cos\alpha}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *CAD*:

$$|AD|^2 = |CA|^2 + |CD|^2 = \frac{a^2\cos^2 3\alpha}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{a^2\cos^2 3\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

Dla kąta ostrego α wartości funkcji trygonometrycznych są dodatnie, więc:

$$|AD| = \left|\frac{a \cdot \cos3\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right| = \frac{a \cdot \cos3\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = a\frac{\cos(2\alpha+\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = a\frac{\cos2\alpha\cos\alpha - \sin2\alpha\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$|AD| = a\frac{\cos\alpha(\cos2\alpha - 2\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = a\frac{1-2\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$|AD| = \frac{a(1-4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$$

co kończy dowód.

Zamiast korzystać z twierdzenia Pitagorasa, można w trójkącie *CAD* zastosować definicję sinusa:

$$|AD| = \frac{|CD|}{\sin\alpha}$$

$$|AD| = \frac{a \cdot \frac{\cos3\alpha}{2\cos\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{a\cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{a(4(1-\sin^2\alpha)-3)}{2\sin\alpha}$$

$$|AD| = \frac{a(1-4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający przekształci wyrażenie $\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$ i wyznaczy odcinek $|CA| = a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2\sin\alpha}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zastosuje twierdzenie Pitagorasa lub definicję sinusa oraz wzory na cosinus sumy kątów, sinus i cosinus podwojonego kąta i zapisze np. równość $|AD| = a\frac{1-2\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}$ lub $|AD| = \frac{a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przekształci wyrażenie do postaci $|AD| = \frac{a(1-4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Zadanie 9. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	11.5. Rachunek różniczkowy. Zdający znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych.

Przykładowe rozwiązania

<u>**I sposób**</u>

Wielomian $f(x) = 3x^{10} - 5x^6 + 3$ jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{10}\left(3 - \frac{5}{x^4} + \frac{3}{x^{10}}\right) = \infty$, wystarczy zatem wykazać, że najmniejsza wartość wielomianu f jest dodatnia.

Wyznaczamy pochodną:

$f'(x) = 30x^9 - 30x^5$ i obliczamy jej miejsca zerowe:

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^9 - x^5 = 0.$

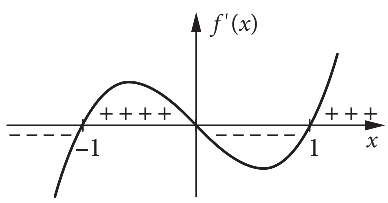
Stąd:

$x^5(x^4-1)=0$

$x^5 = 0$ lub $x^4 = 1$

$x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = -1$.

Szkicujemy przybliżony wykres znaku pochodnej:



Wielomian f jest funkcją malejącą w każdym z przedziałów $(-\infty, -1\rangle$ oraz $\langle 0, 1\rangle$ i funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $\langle -1, 0\rangle$ oraz $\langle 1, \infty)$, więc najmniejszą wartość funkcja osiąga dla $x = -1$ lub $x = 1$.

$f(-1) = f(1) = 3 - 5 + 3 = 1$ – jest to najmniejsza wartość wielomianu, bo $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Najmniejsza wartość jest dodatnia, zatem wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający wyznaczy funkcję pochodną: $f'(x) = 30x^9 - 30x^5$ i obliczy jej miejsca zerowe: $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zbada znak pochodnej i ustali argumenty, dla których wielomian może osiągnąć wartość najmniejszą.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający obliczy wartość najmniejszą i przez fakt, że jest ona dodatnia, udowodni prawdziwość tezy.

<u>**II sposób**</u>

Korzystamy z twierdzenia Bézouta.

Liczby 1 i -1 są pierwiastkami wielomianu $3x^{10} - 5x^6 + 2$, zatem otrzymujemy:

$3x^{10} - 5x^6 + 3 = 3x^{10} - 5x^6 + 2 + 1 = (x^2 - 1)(3x^8 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 2) + 1.$

I dalej:

$(x^2 - 1)(3x^8 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 2) + 1 = (x^2 - 1)^2(3x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 2) + 1 \geqslant 1 > 0$, bo parzyste potęgi liczb rzeczywistych są nieujemne.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający zauważy, że $f(x)$ jest funkcją parzystą i wystarczy zajmować się tylko liczbami $x \geqslant 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zapisze równość

$3x^{10} - 5x^6 + 3 = 3x^{10} - 5x^6 + 2 + 1 = (x^2 - 1)(3x^8 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 2) + 1$

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający obliczy wartość najmniejszą funkcji i przez fakt, że jest ona dodatnia, udowodni prawdziwość tezy.

Zadanie 10. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}, \sin 2x + \cos x = 1, \sin x + \cos x = 1, \cos 2x < \frac{1}{2}$.

Przykładowe rozwiązania

<u>**I sposób**</u>

W równaniu mamy funkcję tangens, zakładamy więc, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Następnie przekształcamy równanie:

$$\sin x \cos 3x + \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x = 0$$

$$\sin x\, (\cos 3x + \cos x) = 0$$

Stosujemy wzór na sumę cosinusów i zapisujemy równanie w postaci:

$$2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

Jest ono równoważne alternatywie równań:

$\sin x = 0$ lub $\cos 2x = 0$ lub $\cos x = 0$

$x = k\pi$ $\quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ – sprzeczne z założeniem

$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Zatem wszystkie liczby rzeczywiste x również możemy zapisać w postaci $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Alternatywne rozwiązanie równania $\sin x\,(\cos 3x + \cos x) = 0$:

$\sin x = 0$ lub $\cos 3x + \cos x = 0$

$\cos 3x = -\cos x = \cos(x + \pi)$, więc albo $3x = x + \pi + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k, albo $3x = -(x + \pi) + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k, co prowadzi do wyniku otrzymanego powyżej.

<u>II sposób</u>

W równaniu mamy funkcję tangens, zakładamy więc, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Przekształcamy równanie do postaci:

$$\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$$

Korzystamy ze wzoru $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ i zapisujemy równanie:

$$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin(-2x)) + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\sin 4x - \sin 2x + \sin 2x = 0$$

Otrzymujemy równanie: $\sin 4x = 0$, czyli $4x = \mathrm{k}\pi$, skąd $x = k\frac{\pi}{4}$. Wśród uzyskanych rozwiązań znajdują się te, które nie spełniają założenia, zatem ostatecznie $x = k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest liczbą całkowitą i $k \neq 2 + 4n$ dla $n \in \mathbf{C}$.

<u>III sposób</u>

Zakładamy, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Przekształcamy równanie do postaci:

$$\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$$

Zauważmy, że

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos x(\cos 2x - 2\sin^2 x)$$

$$\cos 3x = \cos x(1 - 4\sin^2 x)$$

Po podstawieniu do równania otrzymujemy:

$$\sin x \cos x(1 - 4\sin^2 x) + \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \cos x(1 - 4\sin^2 x + 1) = 0$$

$\sin x = 0$ lub $\cos x = 0$ lub $\sin x^2 = \frac{1}{2}$

$x = k\pi$ $\qquad \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}_{}$ $\qquad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

sprzeczne z zał. $\qquad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Zatem wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie możemy zapisać w postaci $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Schemat oceniania trzech sposobów

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający zapisze założenie, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający przekształci równanie do postaci

• $2\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$ i rozwiąże je: $\sin x = 0$ lub $\cos 2x = 0$ lub $\cos x = 0$

albo

• $\sin 4x = 0$

albo

• $\sin x \cos x\,(2 - 4\sin^2 x) = 0$ i rozwiąże je: $\sin x = 0$ lub $\cos x = 0$ lub $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający poda rozwiązania otrzymanych prostych równań: $x = k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest liczbą całkowitą (lub w innej równoważnej postaci).

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający uwzględni założenie i zapisze wszystkie rozwiązania równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Uwagi

1. Jeżeli zdający nie zapisze założenia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i w rezultacie poda rozwiązania: $x = k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest liczbą całkowitą (lub w innej równoważnej postaci), to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$, a następnie podzieli je obustronnie przez $\sin x$ bez założenia, że $\sin x \neq 0$ i poprawnie rozwiąże równanie $\cos 3x + \cos x = 0$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$, a następnie podzieli je obustronnie przez $\sin x$ z założeniem, że $\sin x \neq 0$, poprawnie rozwiąże równanie $\cos 3x + \cos x = 0$, ale nie uwzględni założenia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ oraz nie rozpatrzy przypadku $\sin x = 0$, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$, a następnie podzieli je obustronnie przez $\sin x$ z założeniem, że $\sin x \neq 0$, poprawnie rozwiąże równanie $\cos 3x + \cos x = 0$, uwzględniając założenie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ale nie rozpatrzy przypadku $\sin x = 0$, to otrzymuje **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający poda tylko kilka rozwiązań równania (np. z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ lub nie uwzględni ich okresowego powtarzania się), to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 11. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	11.3. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi Ox. Zatem $a = \text{tg}\alpha\ 45° = 1$.

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy pochodnej funkcji w punkcie styczności

$P(x_0, f(x_0))$: $a = f'(x_0) = 1$.

Obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2},\ \ D_{f'} = D_f = R\setminus\{1\}$$ i zapisujemy równanie:

$$\frac{4}{(1-x_0)^2} = 1$$

$$(x_0 - 1)^2 = 4$$

$$x_0 - 1 = 2 \ \text{ lub } \ x_0 - 1 = -2$$

$$x_0 = 3 \quad \text{lub} \quad x_0 = -1$$

$$f(x_0) = -3 \qquad f(x_0) = 1$$

Istnieją zatem dwie styczne do wykresu funkcji f w punktach $P_1 = (3,\ -3)$ oraz $P_2 = (-1,\ 1)$ tworzące z osią Ox kąt 45°.

Wyznaczamy równania stycznych, korzystając ze wzoru $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$y + 3 = x - 3$ lub $y - 1 = x + 1$,

$y = x - 6$ lub $y = x + 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający obliczy współczynnik kierunkowy prostej: $a = \text{tg}45° = 1$ i wyznaczy funkcję pochodną $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający ułoży równanie $\frac{4}{(1-x)^2} = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający wyznaczy punkty styczności: $P_1 = (3,\ -3)$ oraz $P_2 = (-1,\ 1)$.

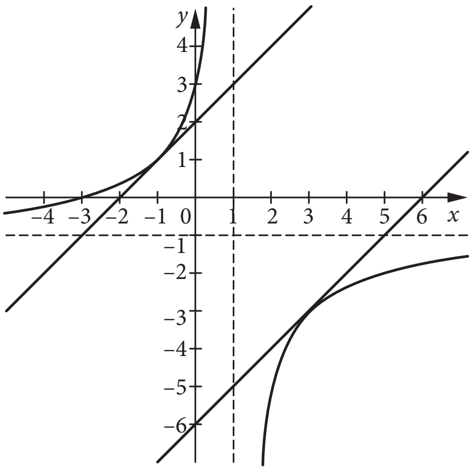
Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający poda równania stycznych: $y = x - 6$, $y = x + 2$.

II sposób

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi Ox. Zatem $a = \text{tg}\ 45° = 1$, czyli równanie stycznej można zapisać w postaci $y = x + b$.

Zauważmy, że $f(x) = \frac{x+3}{1-x} = \frac{-(x-1)-4}{x-1} = \frac{-4}{x-1} - 1$, gdzie $x \neq 1$.



Wykresem funkcji f jest hiperbola, a styczna do hiperboli ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny, którego współrzędne są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = x + b \\ y = \dfrac{x+3}{1-x} \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{1-x} = x + b$$

$$x^2 + bx - b + 3 = 0$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie (tzn. prosta z hiperbolą ma dokładnie jeden punkt wspólny), gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest równy zero.

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4 \cdot (-b + 3) = 0$$

$$b^2 + 4b - 12 = 0$$

$$b = -6 \text{ lub } b = 2$$

Są zatem dwie styczne spełniające warunki zadania: $y = x - 6$, $y = x + 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający obliczy współczynnik kierunkowy prostej: $a = \mathrm{tg}45° = 1$ i zapisze układ równań $\begin{cases} y = x + b \\ y = \dfrac{x+3}{1-x} \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający wyprowadzi z układu równanie kwadratowe z jedną niewiadomą i parametrem b, np. $x^2 + bx - b + 3 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający zapisze warunek $\Delta = 0$ i obliczy wartości parametrów b, dla których jest on spełniony: $b = -6$ lub $b = 2$.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający poda równania stycznych: $y = x - 6$, $y = x + 2$.

Zadanie 12. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, czyli kombinacje. Zatem liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego jest równa:

$$|\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowano dwie liczby różniące się co najmniej o trzy. Łatwiej wskazać wyniki, które nie sprzyjają zdarzeniu A, dlatego rozważamy zdarzenie przeciwne:

A' – wylosowano dwie liczby różniące się o mniej niż trzy.

Zdarzenie A' jest sumą dwóch wykluczających się zdarzeń:

B_1 – wylosowano dwie liczby różniące się o jeden;

B_2 – wylosowano dwie liczby różniące się o dwa.

Zauważmy, że $B_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{n-1, n\}\}$, więc $|B_1| = n-1$,

$B_2 = \{\{1, 3\},\{2, 4\},\{3, 5\},\ldots,\{n-2,n\}\}$, więc $|B_2| = n-2$.

Zatem $|A'| = |B_1| + |B_2| = 2n-3$, czyli z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}$$

Skoro $P(A) = \frac{7}{12}$, to $P(A') = 1 - P(A) = \frac{5}{12}$.

Układamy równanie:

$$\frac{4n-6}{n^2-n} = \frac{5}{12}$$

$$5n^2 - 5n = 48n - 72$$

$$5n^2 - 53n + 72 = 0$$

które spełniają dwie liczby: $n_1 = \frac{8}{5}$, $n_2 = 9$. Liczba $n_1 = \frac{8}{5}$ nie jest liczbą całkowitą, zatem dla $n = 9$ prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, które różnią się co najmniej o trzy, jest równe $\frac{7}{12}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = \binom{n}{2}$

albo

- opisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A'.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający poda liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A': $|A'| = 2n-3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ i zapisze prawdopodobieństwo $P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}$.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

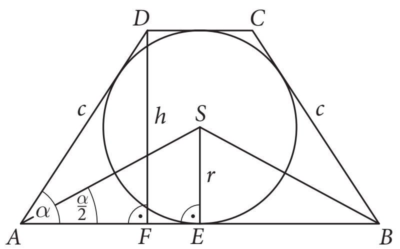
Zdający rozwiąże równanie $\frac{4n-6}{n^2-n} = \frac{5}{12}$, odrzuci rozwiązanie sprzeczne z warunkami zadania i poda odpowiedź: $n = 9$.

Zadanie 13. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. POZIOM PODSTAWOWY 7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Dane:
$|AS| = |BS| = 10$
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów wewnętrznych, stąd $|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$. Ponadto trójkąt ABS jest równoramienny, więc $|\sphericalangle ASB| = 180° - \alpha$.
Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABS otrzymujemy:

$$|AB|^2 = 10^2 + 10^2 - 2\cdot 10^2 \cdot \cos(180° - \alpha)$$

$$|AB|^2 = 200 + 200\cdot\cos\alpha = 200 + 200\cdot\frac{3}{5} = 320$$

$$|AB| = 8\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AES obliczamy promień okręgu wpisanego w trapez:

$r = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{5})^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, więc wysokość trapezu $h = 4\sqrt{5}$.

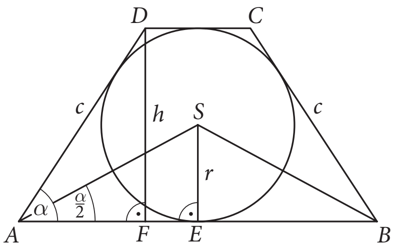
Z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, czyli $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

W trójkącie prostokątnym AFD:
$\sin\alpha = \frac{h}{c}$, stąd $c = 4\sqrt{5}\cdot\frac{5}{4} = 5\sqrt{5}$.

W ten trapez można wpisać okrąg, więc $|AB| + |CD| = 2c = 10\sqrt{5}$, zatem pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)\cdot h = 5\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5} = 100$$

II sposób



Dane:
$|AS| = |BS| = 10$
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów wewnętrznych, stąd $|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$.

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta otrzymujemy:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3}{5} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

W trójkącie prostokątnym AES:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{10}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{r}{10}$$

Stąd $r = 2\sqrt{5}$, więc wysokość trapezu $h = 4\sqrt{5}$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AES:

$|AE|^2 = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$, więc $|AB| = 8\sqrt{5}$.

Z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, czyli $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, stąd $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

W trójkącie prostokątnym AFD:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{|AF|}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{h}{|AF|}$$

$$|AF| = 3\sqrt{5}$$

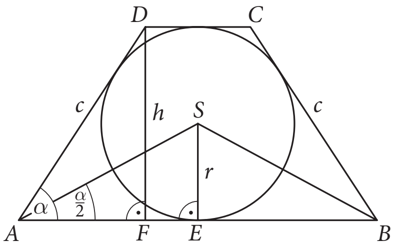
Z własności trapezu równoramiennego:

$$|CD| = |AB| - 2\cdot|AF| = 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Zatem pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)\cdot h = 5\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5} = 100$$

<u>III sposób</u>



Dane:
$|AS| = |BS| = 10$
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Przyjmijmy oznaczenia: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = |BC| = c$, $|DF| = h$, $|AF| = x$.
W trójkącie prostokątnym AFD:

$$\cos\alpha = \frac{x}{c}$$

$$x = \frac{3}{5}c$$

W ten trapez można wpisać okrąg, więc:

$$a + b = 2c$$

$$2b + 2x = 2c$$

$$b + \frac{3}{5}c = c$$

$$b = \frac{2}{5}c$$

Stąd $|AE| = x + \frac{1}{2}b = \frac{4}{5}c$.
Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AFD:

$$h = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{3}{5}c\right)^2} = \frac{4}{5}c$$

Stąd $|ES| = \frac{1}{2}h = \frac{2}{5}c$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AES:

$$|AE|^2 + |ES|^2 = |AS|^2$$

$$\left(\frac{4}{5}c\right)^2 + \left(\frac{2}{5}c\right)^2 = 100$$

$$c = 5\sqrt{5}$$

Ponadto $a + b = 2c = 10\sqrt{5}$, $h = \frac{4}{5}c = 4\sqrt{5}$, więc pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h = 5\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5} = 100$$

Schemat oceniania trzech sposobów

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający:

• zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie ABS: $|AB|^2 = 10^2 + 10^2 - 2\cdot 10^2\cdot\cos(180° - \alpha)$

albo

• zastosuje wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczy $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

albo

- zastosuje własność czworokąta opisanego na okręgu i zapisze równość $2b+2x=2c$ lub wyznaczy wysokość trapezu w zależności od długości ramienia $h=\frac{4}{5}c$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający:

- obliczy długość dolnej podstawy: $|AB|=8\sqrt{5}$ lub wysokość trapezu: $h=4\sqrt{5}$

albo

- zapisze równość $b=\frac{2}{5}c$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający:

- obliczy długość dolnej podstawy: $|AB|=8\sqrt{5}$ lub wysokość trapezu: $h=4\sqrt{5}$

albo

- zapisze obie równości: $b=\frac{2}{5}c$ i $h=\frac{4}{5}c$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

Zdający:

- obliczy długość ramienia trapezu: $c=5\sqrt{5}$ i sumę długości jego podstaw:
$|AB|+|CD|=2c=10\sqrt{5}$

albo

- obliczy długość górnej postawy trapezu: $|CD|=2\sqrt{5}$

i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

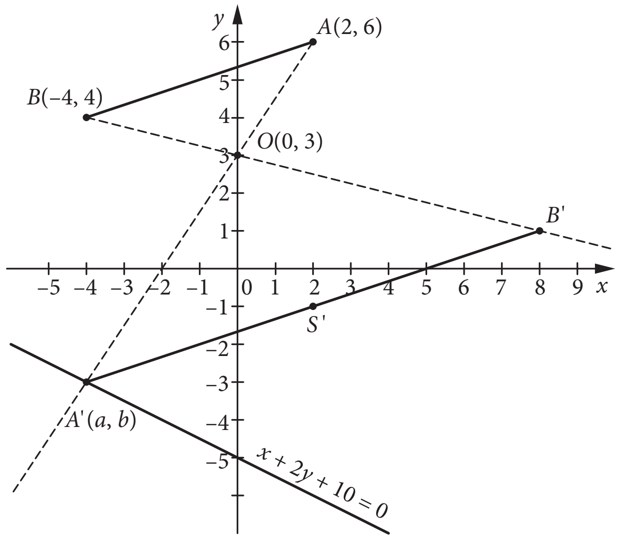
Zdający wyznaczy pole trapezu: $P_{ABCD}=100$.

Zadanie 14. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.3. Planimetria. Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności; 7) oblicza współrzędne oraz długość wektora, dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach. POZIOM PODSTAWOWY 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Punkt $A' = (a, b)$ leży na prostej $x + 2y + 10 = 0$, więc $a + 2b + 10 = 0$,
stąd $a = -2b - 10$, zatem współrzędne punktu $A' = (-2b - 10, b)$.
Z definicji jednokładności:

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$[-2b - 10,\ b - 3] = k \cdot [2,\ 3]$$

Z równości wektorów otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2b - 10 = 2k \\ b - 3 = 3k \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $\begin{cases} k = -2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Zatem skala jednokładności $k = -2$ oraz $A' = (-4, -3)$.
Z definicji jednokładności wyznaczamy teraz współrzędne punktu $B' = (b_1, b_2)$:

$$\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$$

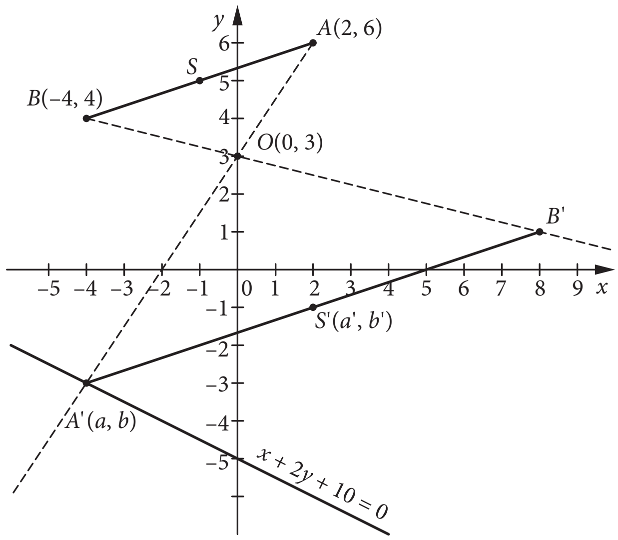
$$[b_1, b_2 - 3] = -2 \cdot [-4, 1]$$

$$\begin{cases} b_1 = 8 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

$$B' = (8, 1)$$

Ze wzoru na współrzędne środka odcinka ustalamy współrzędne środka okręgu, którego średnicą jest odcinek $A'B'$: $S' = (2, -1)$ oraz ze wzoru na odległość dwóch punktów obliczamy promień tego okręgu: $r' = |S'B'| = \sqrt{(8-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{40}$, więc równanie tego okręgu: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 40$.

II sposób



Z konstrukcji obrazu punktu w jednokładności wynika, że punkt A' leży na prostej AO, jest zatem punktem przecięcia tej prostej z prostą $x+2y+10=0$. Wyznaczamy równanie prostej AO: $a=\frac{6-3}{2-0}=\frac{3}{2}$ i $b=3$, więc $y=\frac{3}{2}x+3$. Współrzędne punktu A' obliczamy, rozwiązując układ równań: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+3 \\ x+2y+10=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$A'=(-4,\ -3)$$

Z definicji jednokładności wyznaczamy skalę k:

$$\overrightarrow{OA'}=k\cdot\overrightarrow{OA}$$

$$[-4,\ -6]=k\cdot[2,3]$$

$$k=-2$$

Przyjmujemy oznaczenia: S – środek okręgu o średnicy AB, r – promień tego okręgu. Wtedy ze wzoru na współrzędne środka odcinka wyznaczamy $S=(-1,5)$, a ze wzoru na odległość dwóch punktów $r=|SA|=\sqrt{(2+1)^2+(6-5)^2}=\sqrt{10}$.

Niech teraz $S'=(a',\ b')$ – środek okręgu o średnicy $A'B'$, r' – promień tego okręgu. Z własności jednokładności: $r'=|k|\cdot r=2\sqrt{10}$ oraz $\overrightarrow{OS'}=k\cdot\overrightarrow{OS}$

$$[a',\ b'-3]=-2\cdot[-1,2]$$

$$a'=2,\ b'=-1\text{, czyli } S'=(2,-1)$$

Zatem równanie okręgu o średnicy $A'B'$: $(x-2)^2+(y+1)^2=40$.

Schemat oceniania obu sposobów

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- wykorzysta fakt, że punkt A' należy do prostej $x+2y+10=0$, i zapisze jego współrzędne z jedną niewiadomą, np. $A'=(-2b-10,\ b)$

albo

- wyznaczy współrzędne środka i promień okręgu o średnicy AB: $S=(-1, 5)$, $r=\sqrt{10}$ lub zapisze układ równań, z którego można obliczyć współrzędne punktu A': $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+3 \\ x+2y+10=0 \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający:

- wykorzysta definicję jednokładności i z równości wektorów zapisze układ, z którego można obliczyć skalę jednokładności i współrzędne punktu A', np. $\begin{cases} -2b-10=2k \\ b-3=3k \end{cases}$

albo

- rozwiąże układ równań $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+3 \\ x+2y+10=0 \end{cases}$ i poda współrzędne punktu $A'=(-4,-3)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający wyznaczy współrzędne środka i promień okręgu o średnicy AB: $S=(-1,5)$, $r=\sqrt{10}$ i obliczy skalę jednokładności $k=-2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

Zdający obliczy współrzędne środka okręgu, którego średnicą jest odcinek $A'B'$: $S'=(2, -1)$, oraz promień tego okręgu: $r'=\sqrt{40}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający poda równanie okręgu o średnicy $A'B'$: $(x-2)^2+(y+1)^2=40$.

Zadanie 15. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$. 3. Równania i nierówności. Zdający: 1) stosuje wzory Viète'a; 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 3) rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych; 7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

Przykładowe rozwiązanie

Współrzędne punktów przecięcia prostej z parabolą to pary liczb spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y=(a-3)x+a+4 \\ y=\frac{1}{2}x^2-2ax+a+8 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2-2ax+a+8=(a-3)x+a+4 \quad |\cdot 2$$

$$x^2-4ax-2ax+6x+8=0$$

$$x^2-6(a-1)x+8=0$$

Pierwiastki tego równania są odciętymi $x_1,\ x_2$ punktów wspólnych prostej i paraboli. Prosta z parabolą ma dwa punkty wspólne, gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest większy od zera. Zatem:

$$\Delta > 0$$
$$36(a-1)^2 - 4\cdot 8 > 0 \quad |:4$$
$$(a-1)^2 > \frac{8}{9}$$
$$a > 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ lub } a < 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \infty\right)$$

Następnie korzystamy ze wzorów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ oraz $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ i przekształcamy nierówność $x_1^3 + x_2^3 \leqslant 9x_1x_2$ do postaci:

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \leqslant 9x_1x_2$$
$$(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \leqslant 9x_1x_2$$

Po zastosowaniu wzorów Viète'a otrzymujemy nierówność z niewiadomą a:

$$6(a-1)(36(a-1)^2 - 3\cdot 8) \leqslant 9\cdot 8 \quad |:(9\cdot 8)$$
$$(a-1)(3(a-1)^2 - 2) \leqslant 1$$
$$(a-1)(3a^2 - 6a + 1) \leqslant 1$$
$$3a^3 - 9a^2 + 7a - 2 \leqslant 0$$

Rozkładamy wielomian na czynniki, wykorzystując twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych i dzielenie przez dwumian. Otrzymujemy:

$$(a-2)(3a^2 - 3a + 1) \leqslant 0$$

Jedynym pierwiastkiem tego wielomianu jest $a = 2$, gdyż wyróżnik czynnika kwadratowego jest ujemny. Ponieważ $3a^2 - 3a + 1 \geqslant 0$, więc nierówność zachodzi dla $a \leqslant 2$.

Na koniec wyznaczamy iloczyn warunków $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^3 + x_2^3 \leqslant 9x_1x_2 \end{cases}$.

Ponieważ $a = 2 > 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$, więc dla $a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\right\rangle$ prosta o równaniu $y = (a-3)x + a + 4$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8$ w dwóch punktach o odciętych $x_1,\ x_2$ tak, że współrzędne punktu $P = (x_1, x_2)$ spełniają nierówność $x^3 + y^3 \leqslant 9xy$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Etap I polega na zapisaniu układu równań $\begin{cases} y = (a-3)x + a + 4 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8 \end{cases}$ i wyprowadzeniu z niego równania kwadratowego z niewiadomą x i parametrem a: $x^2 - 6(a-1)x + 8 = 0$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Etap II polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga: Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geqslant 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Etap III polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 \leqslant 9x_1x_2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za trzeci etap rozwiązania jest następujący:
1 punkt zdający otrzymuje za zastosowanie wzorów skróconego mnożenia i zapisanie nierówności $(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \leqslant 9x_1x_2$.

2 punkty zdający otrzymuje za zastosowanie wzorów Viète'a i uporządkowanie nierówności z niewiadomą a do postaci $3a^3 - 9a^2 + 7a - 2 \leqslant 0$.

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności: $a \in (-\infty, 2\rangle$.

Etap IV polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu drugiego i trzeciego: $a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\right\rangle$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

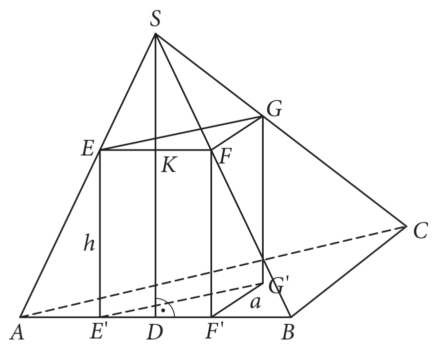
Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etapy II i III rozwiązania albo poprawnie wykona etap II i popełni błędy w rozwiązaniu równania z etapu III, albo gdy popełni błędy w etapie II i dobrze rozwiąże nierówność z etapu III.

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **6 punktów**.

Zadanie 16. (0–7)

III. Modelowanie matematyczne.	9.2. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. 11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Przykładowe rozwiązanie
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Graniastosłup $E'F'G'EFG$ jest graniastosłupem prawidłowym trójkątnym, gdyż trójkąty ABC i EFG są podobne. Odległość przekroju EFG od płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest równa wysokości tego graniastosłupa.

Trójkąt *EFS* jest podobny do trójkąta *ABS*, więc:

$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{|SK|}{|SD|}$$

Oznaczmy $a = |EF|$, a $h = |DK|$. Zatem:

$$\frac{a}{12} = \frac{16-h}{16} \quad |\cdot 48$$

$$4a = 48 - 3h$$

$$h = 16 - \frac{4}{3}a$$

Objętość graniastosłupa jest określona wzorem:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(16 - \frac{4}{3}a\right)$$

$$V(a) = \sqrt{3}\left(4a^2 - \frac{1}{3}a^3\right), \text{ gdzie } D\text{: } a \in (0, 12).$$

Aby zbadać, dla jakiego argumentu objętość jest największa, wyznaczamy pochodną funkcji objętości:

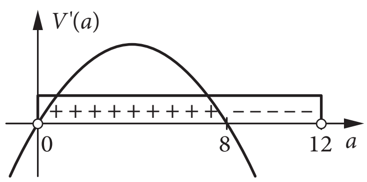
$$V'(a) = \sqrt{3} \cdot (8a - a^2),\ \ D' = D = (0, 12)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$V'(a) = 0 \Longleftrightarrow a(8-a) = 0$$

$$a_1 = 0,\ a_2 = 8$$

Badamy znak pochodnej w dziedzinie:



$V'(a) > 0$ dla $a \in (0, 8)$ oraz $V'(a) < 0$ dla $a \in (8, 12)$.

Zatem objętość $V(a)$ rośnie w przedziale $(0, 8\rangle$ i maleje w przedziale $\langle 8, 12)$. Wynika stąd, że dla $a = 8$ objętość graniastosłupa jest największa.

Obliczamy jeszcze wysokość tego graniastosłupa:

$$h = 16 - \frac{4}{3}a = \frac{16}{3}$$

Zatem przekrój ostrosłupa *ABCS* musi znajdować się w odległości $\frac{16}{3}$ od jego podstawy.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania można podzielić na trzy etapy.

Etap I składa się z trzech części:

a) wybór zmiennej, np. a – krawędź podstawy graniastosłupa, i zapisanie za pomocą tej zmiennej wysokości graniastosłupa: $h = 16 - \frac{4}{3}a$;

b) zapisanie objętości graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. a: $V(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(16 - \frac{4}{3}a\right)$;

c) określenie dziedziny funkcji V: $a \in (0, 12)$.

Zdający może otrzymać maksymalnie po **1 punkcie** za realizację każdej części tego etapu, przy czym:

– jeżeli w pierwszej części zdający popełni drobny błąd rachunkowy, który utrudnia znacząco dalsze obliczenia, i konsekwentnie poda objętość graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, to otrzymuje **1 punkt** za realizację drugiej części;

– jeżeli w pierwszej części zdający popełni błąd merytoryczny, to otrzymuje **0 punktów** za pierwszą i drugą część tego etapu;

– za poprawne wyznaczenie dziedziny funkcji zgodnej z geometrycznymi warunkami zadania zdający otrzymuje **1 punkt** niezależnie od poprawności realizacji poprzednich części tego etapu.

Etap II składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $V(a)$: $V'(a) = \sqrt{3} \cdot (8a - a^2)$;

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $a_1 = 0$, $a_2 = 8$;

c) uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V osiąga wartość największą dla $a = 8$.

Za poprawne rozwiązanie każdej części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Etap III

Obliczenie wysokości graniastosłupa dla $a = 8$: $h = \frac{16}{3}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania zdający otrzymuje **7 punktów**.