

KOD

--	--	--

NR UCZNIA

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PRÓBNA MATURA Z MATURITĄ Matematyka

POZIOM ROZSZERZONY

NOWA FORMUŁA

CZAS PRACY: 180 minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 25 stron (zadania 1–15).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie wpisz swój numer ucznia.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0-1)

Granica $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$ jest równa:

A. $\frac{18}{7}$

B. 1

C. $\frac{16}{3}$

~~D. $\frac{27}{4}$~~

Zadanie 2. (0-1)

Wartość liczby $[(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}]^2$ wynosi:

~~A. 6~~

B. 3

C. 4

D. $4 - 2\sqrt{3}$

Zadanie 3. (0-1)

Wartość podanego logarytmu $\log_{3\sqrt[3]{81}} \frac{\sqrt{3}}{27}$ jest równa:

A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{7}{3}$

~~C. $-\frac{15}{14}$~~

D. $-\frac{31}{28}$

Zadanie 4. (0-1)

Niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ będą niezależnymi zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$ wskaż prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń $A \setminus B$.

A. $P(A \setminus B)=0,2$

~~B. $P(A \setminus B)=0,3$~~

C. $P(A \setminus B)=0,6$

D. $P(A \setminus B)=0,1$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zad 1

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad x=3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta > 0 \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y = (x+1)(x-3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+1)(x-3)} = \frac{9+9+9}{3+1} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

Zad 2

$$\begin{aligned} [(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}]^2 &= [(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}]^2 + 2(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + \\ &+ [(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}]^2 = 2-\sqrt{3} + 2[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{\frac{1}{2}} + 2+\sqrt{3} = \\ &= 4 + 2(4-3)^{\frac{1}{2}} = 4 + 2 = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

Zad 3

$$\log_3 \sqrt[3]{81} \cdot \frac{\sqrt{3}}{27} = x$$

$$\log_a b = c \quad a > 0, a \neq 1$$

$$a^c = b \quad b > 0$$

$$(3^3 \sqrt[3]{81})^x = \frac{\sqrt{3}}{27}$$

$$(3^1 \cdot 3^{\frac{4}{3}})^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}$$

$$3^{\frac{7}{3}x} = 3^{-\frac{5}{2}}$$

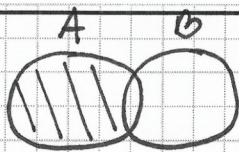
$$\frac{7}{3}x = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{7}$$

$$x = -\frac{15}{14}$$

$$\log_3 \sqrt[3]{81} \cdot \frac{\sqrt{3}}{27} = -\frac{15}{14}$$

Zad 4



$$A|B = A \setminus (A \cap B)$$

$$P(A|B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gdy A, B - zdarzenia niezależne

$$P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

$$P(A|B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

Zadanie 5. (0-2)

Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+9+14+\dots+(5n-1)}{7+10+13+\dots+(3n+4)}$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

1	6	6
---	---	---

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+9+14+\dots+(5n-1)}{7+10+13+\dots+(3n+4)}$$

Licznik jest sumą ciągu arytmetycznego n początkowych wyrazów

$$a_1 = 4, r = 5, a_n = 4 + (n-1)5 = 5n-1$$

$$S_n = \frac{4 + (5n-1)}{2} \cdot n = \frac{5n^2 + 3n}{2}$$

Mianownik jest sumą n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_1 = 7, r = 3, a_n = 7 + (n-1) \cdot 3 = 3n+4$$

$$S_n = \frac{7 + (3n+4)}{2} \cdot n = \frac{3n^2 + 11n}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^2 + 3n}{2}}{\frac{3n^2 + 11n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n}{3n^2 + 11n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(5 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{11}{n}\right)} = \frac{5}{3} \approx 1,666\dots$$

Zadanie 6. (0-3)

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{|x-1|-m}{\sqrt{x+3}}$ ma dwa miejsca zerowe?

$$f(x) = 0$$

$$D: x+3 > 0$$

$$x > -3$$

$$\frac{|x-1|-m}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$|x-1|-m = 0$$

$$|x-1| = m \quad m > 0$$

$$x-1 = m \quad \vee \quad x-1 = -m$$

$$x = m+1 \quad \vee \quad x = 1-m$$

$$-3 < 1-m < 1+m$$

$$1-m > -3$$

$$-m > -4$$

$$m < 4$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ m < 4 \end{cases}$$

$$m \in (0, 4)$$

Schemat punktowania

1p - określenie dziedziny funkcji i określenie m. zerowych

2p - podanie warunków dla jakiego parametru m równanie

$|x-1|=m$ ma dwa rozwiązania oraz wyznaczenie tych rozwiązań: $m > 0$, $x = m+1$, $x = 1-m$

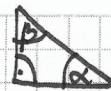
3p - podanie warunków, dla jakiego parametru m dwa miejsca zerowe należą do dziedziny oraz zapisanie ostatecznej odpowiedzi $m \in (0, 4)$

Zadanie 7. (0-4)

Wykaż, że jeśli α, β są różnymi kątami trójkąta spełniającymi warunek

$\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$, to ten trójkąt jest prostokątny.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \left[2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \cdot \sin \left[2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad | : \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 1$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(\alpha - \beta) = 0$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = \beta$$

ale $\alpha \neq \beta$

obliczanie trzeciego kąta w trójkącie

$$180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = \underline{\underline{90^\circ}}$$

zatem Δ jest prostokątny

Schemat odpowiedzi:

1p - zastosowanie wzoru na sumę i różnicę sinusów

2p - doprowadzenie lewej / prawej strony równania do postaci $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$

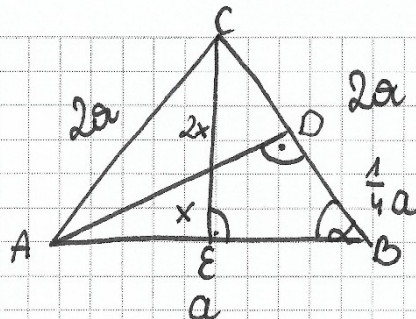
z wykorzystaniem wzoru na sinus podwójnego kąta

3p - obliczenie $\sin(\alpha + \beta) = 1$

4p - podanie, że $\alpha + \beta = 90^\circ$ oraz wyciągnięcie wniosku, że trzeci kąt trójkąta wynosi 90° , zatem Δ

Zadanie 8. (0-4)

W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC|=|BC|$ wysokość CE jest dwa razy dłuższa od wysokości AD . Wykaż, że cosinus kąta przy wierzchołku C wynosi $\frac{7}{8}$.



$$\triangle ABD \sim \triangle ECB \text{ (kkk)}$$

$$|\angle ABD| = |\angle ECB| = \alpha$$

$$|\angle ADB| = |\angle CEB| = 90^\circ$$

$$k = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{1}{2} \quad |CB| = 2|AB|$$

$$\cos \alpha = \frac{|EB|}{|CB|} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{1}{4} \quad \frac{|BD|}{a} = \frac{1}{4} \quad |BD| = \frac{1}{4}a$$

$$|CD| = |CB| - |DB|$$

$$|CD| = 2a - \frac{1}{4}a = \frac{7}{4}a$$

W $\triangle ADC$

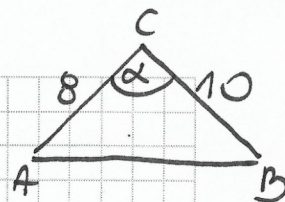
$$\cos \beta = \frac{|CD|}{|AC|}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{7}{4}a}{2a} = \frac{7}{8}$$

$$\boxed{\cos \beta = \frac{7}{8}}$$

Zadanie 9. (0-4)

Dla trójkąta ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku C dane są długości boków $|AC|=8\text{cm}$ i $|BC|=10\text{cm}$. Oblicz długość boku AB wiedząc, że pole trójkąta jest równe 32cm^2 .



$$P_{\triangle ABC} = 32$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \sin \alpha = 32$$

$$40 \sin \alpha = 32 \quad | :40$$

$$\sin \alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \vee \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$$

$$\cos \alpha < 0$$

nie spełnia
warunków zadania

Z twierdzenia cosinusów

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 |AC| \cdot |BC| \cdot \cos \alpha$$

$$|AB|^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$|AB|^2 = 164 + 196$$

$$|AB|^2 = 260$$

$$|AB| = 2\sqrt{65}$$

Schemat punktowania

1p - wyrażenie sinusa kąta przy wierzchołku C - $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

2p - wyznaczenie cos kąta rozwartego przy wierz. C - $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

3p - zastosowanie twierdzenia cosinusów do obliczenia boku AB

4p - obliczenie długości boku AB i podanie odpowiedzi
 $|AB| = 2\sqrt{65}$

Zadanie 10. (0-4)

Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość x ($x > 0$).

$$a_1 = x, a_2 = \frac{x\sqrt{3}}{2}, a_3 = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3x}{4}, a_4 = \frac{\frac{3x}{4} \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x}{8}, \dots$$

$$P_1 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, P_2 = \frac{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{16}, P_3 = \frac{\left(\frac{3x}{4}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}x^2}{64}, \dots$$

Ciąg pól utworzonych trójkątów jest ciągiem nieskończonym geometrycznym o wyrazie pierwszym $P_1 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ oraz ilorazie $q = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{16}}{\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{16} \cdot \frac{4}{x^2 \sqrt{3}} = \frac{3}{4}$

$$|q| < 1 \quad \left|\frac{3}{4}\right| < 1$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad S = \frac{\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \underline{\underline{x^2 \sqrt{3}}}$$

Schemat punktowania

1p - zapisanie boku każdego kolejnego trójkąta jako iloczynu długości boku trójkąta poprzedniego i liczby $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2p - obliczenie pola pierwszego trójkąta

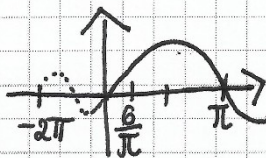
3p - zapisanie, że ciąg pól utworzonych trójkątów jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazie pierwszym równym $P_1 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ i ilorazie $q = \frac{3}{4}$

4p - korzystając ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego obliczenie sumy pól wszystkich trójkątów $S = x^2 \sqrt{3}$

Zadanie 11. (0-4)

Rozwiąż równanie $3\cos^2 x - 7 = \sin^2 x - 10\sin x$ w przedziale $\langle -2\pi, 0 \rangle$.

$$\begin{aligned}
 3\cos^2 x - 7 &= \sin^2 x - 10\sin x \\
 3(1 - \sin^2 x) - 7 &= \sin^2 x - 10\sin x \\
 3 - 3\sin^2 x - 7 &= \sin^2 x - 10\sin x \\
 -4\sin^2 x + 10\sin x - 4 &= 0 \quad / : (-2) \\
 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 &= 0 \\
 \sin x &= t \quad t \in \langle -1, 1 \rangle \\
 2t^2 - 5t + 2 &= 0 \quad \Delta = 25 - 16 = 9 \\
 t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad t_2 = \frac{5+3}{4} = 2 \notin \langle -1, 1 \rangle \\
 \sin x &= \frac{1}{2} \\
 x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$



$\langle -2\pi, 0 \rangle$

$$\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{12}{6}\pi = -\frac{11}{6}\pi$$

$$\frac{5\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi}{6} - \frac{12}{6}\pi = -\frac{7}{6}\pi$$

Odpowiedź: $x = -\frac{11}{6}\pi \vee x = -\frac{7}{6}\pi$

Schemat punktowania

1p - zapisanie równania w postaci $-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$
 lub $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

2p - rozwiązanie w/w równania i zapisanie $\sin x = 2$
 lub $\sin x = \frac{1}{2}$

3p - zapisanie, że równanie $\sin x = 2$ nie ma rozwiązań
 oraz podanie rozwiązań równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze
 liczb rzeczywistych

4p - podanie rozwiązań należących do przedziału
 $\langle -2\pi, 0 \rangle$, $x = -\frac{11}{6}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$

Zadanie 12. (0-4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie:

$$mx^2 - 4(m+1)x - \frac{1}{2}m^2 = 0 \text{ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.}$$

1) $m = 0$ równanie dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie
 $-4x = 0$
 $x = 0$

2) $m \neq 0$
 $\Delta < 0$ $\Delta = [-4(m+1)]^2 - 4m(-\frac{1}{2}m^2) = 16(m^2 + 2m + 1) + 2m^3$
 $= 2m^3 + 16m^2 + 32m + 16$

$$2m^3 + 16m^2 + 32m + 16 < 0 \quad / : 2$$

$$m^3 + 8m^2 + 16m + 8 < 0$$

$$m^3 + 8 + 8m^2 + 16m < 0$$

$$(m+2)(m^2 - 2m + 4) + 8m(m+2) < 0$$

$$(m+2)(m^2 - 2m + 4 + 8m) < 0$$

$$(m+2)(m^2 + 6m + 4) < 0$$

$$m = -2 \quad \vee \quad m^2 + 6m + 4 < 0$$

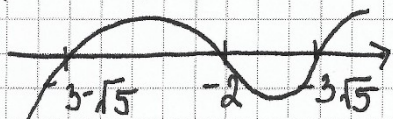
$$\Delta = 36 - 16 = 20$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$$

$$m_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{2} = -3 - \sqrt{5} \quad m_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{2} = -3 + \sqrt{5}$$

$$m = -2, \quad m = -3 - \sqrt{5}, \quad m = -3 + \sqrt{5}$$

$$(m+2)(m^2 + 6m + 4) < 0$$



$$\Delta < 0, \text{ gdy } m \in (-\infty, -3 - \sqrt{5}) \cup (-2, -3 + \sqrt{5})$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty, -3 - \sqrt{5}) \cup (-2, -3 + \sqrt{5}) \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Schemat punktowania

1p - sprawdzenie, że dla $m = 0$ dane równanie ma rozwiązanie

2p - podanie układów warunków, na to równanie kwadratowe nie miało rozwiązania $\begin{cases} \Delta = 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$

3p - wyznaczenie wartości parametrów m spełniających warunki $\Delta < 0$

4p - uwzględnienie założenia $m \neq 0$ i podanie odpowiedzi

Zadanie 13. (0-5)

Ciąg (x, y, z) o wyrazach dodatnich jest geometryczny oraz w tym ciągu suma podwojonego wyrazu pierwszego i drugiego jest równa wyrazowi trzeciemu. Natomiast ciąg $(3x-1, z+y-2, 2z+1)$ jest arytmetyczny. Oblicz x, y, z .

$$x > 0, y > 0, z > 0$$

x, y, z - ciąg geometryczny

$$\rightarrow y^2 = xz$$

$$\rightarrow 2x + y = z$$

$3x-1, z+y-2, 2z+1$ - ciąg arytmetyczny

$$z+y-2 = \frac{3x-1+2z+1}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2z + 2y - 2 = 3x + 2z$$

$$\rightarrow 2y - 2 = 3x$$

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ z = 2x + y \\ 2y = 3x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ z = 2x + \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{3}{2}x+2)^2 = x(\frac{3}{2}x+2) \\ z = \frac{3}{2}x+2 \\ y = \frac{3}{2}x+2 \end{cases}$$

$$(\frac{3}{2}x+2)^2 = x(\frac{3}{2}x+2)$$

$$\frac{9}{4}x^2 + 6x + 4 = \frac{3}{2}x^2 + 2x \quad / \cdot 4$$

$$9x^2 + 24x + 16 = 14x^2 + 8x$$

$$5x^2 - 24x + 8x - 16 = 0$$

$$5x^2 - 16x - 16 = 0$$

$$\Delta = 256 + 320 = 576$$

$$\sqrt{\Delta} = 24$$

$$x_1 = \frac{16-24}{10} = -0,8 \quad -0,8 < 0$$

$$x_2 = \frac{16+24}{10} = 4$$

$$x = 4$$

$$y = \frac{3}{2} \cdot 4 + 2 = 8$$

$$z = \frac{3}{2} \cdot 4 + 2 = 16$$

Odp: $x=4, y=8, z=16$

Schemat punktowania

1p - wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania $y^2 = xz$ lub wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania $z + y - 2 = \frac{3x - 1 + 2z + 1}{2}$

2p - wykorzystanie własności obu ciągów oraz zapisanie $z = 2x + y$

$$\begin{cases} y^2 = x \cdot z \\ z + y - 2 = \frac{3x - 1 + 2z + 1}{2} \\ z = 2x + y \end{cases}$$

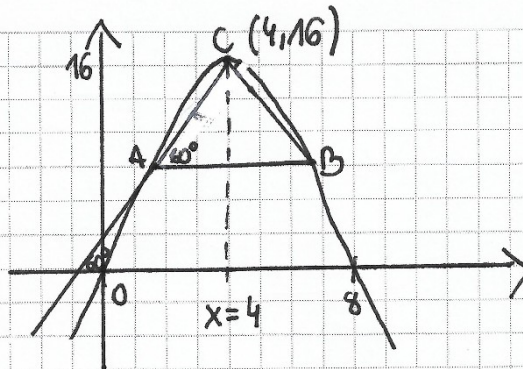
3p - rozwiązanie układu równań z 3 niewiadomymi

4p - odrzucenie ujemnego rozwiązania i podanie odp $x = 4, y = 8, z = 16$

Zadanie 14. (0-5)

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 8x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi OX. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

$$\begin{aligned}
 y &= -x^2 + 8x & \Delta &= 64 \\
 -x^2 + 8x &= 0 \\
 x(-x + 8) &= 0 \\
 x &= 0 \vee x = 8 \\
 C &= \left(-\frac{8}{2}, -\frac{64}{4}\right) \\
 C &= (4, 16)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 AC : y &= ax + b \\
 a &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AC : y &= \sqrt{3}x + b & C &= (4, 16) \\
 16 &= 4\sqrt{3} + b \\
 b &= 16 - 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$AC : y = \sqrt{3}x + 16 - 4\sqrt{3}$$

$$\begin{cases}
 y = \sqrt{3}x + 16 - 4\sqrt{3} \\
 y = -x^2 + 8x
 \end{cases}$$

$$-x^2 + 8x = \sqrt{3}x + 16 - 4\sqrt{3}$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 8x + 16 - 4\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 + (\sqrt{3} - 8)x + 16 - 4\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 8x + 16 - 4\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3} - 8)^2 - 4(16 - 4\sqrt{3})$$

$$= 3 - 16\sqrt{3} + 64 - 64 + 16\sqrt{3} = 3$$

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = 4 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = 4$$

$$y_1 = -(4-\sqrt{3})^2 + 8(4-\sqrt{3}) = -(16 - 8\sqrt{3} + 3) + 32 - 8\sqrt{3} =$$

$$= -16 + 8\sqrt{3} - 3 + 32 - 8\sqrt{3} = 13$$

$$y_2 = -16 + 32 = 16$$

$$A(4-\sqrt{3}, 13) \quad B(x_B, 13)$$

$$\frac{x_B + 4 - \sqrt{3}}{2} = 4$$

$$x_B = 8 - 4 + \sqrt{3}$$

$$x_B = 4 + \sqrt{3}$$

$$C = (4, 16)$$

$$A = (4 - \sqrt{3}, 13)$$

$$B = (4 + \sqrt{3}, 13)$$

Schemat punktowania

1p: wykonanie rysunku, zaznaczenie $\angle 60^\circ$ oraz obliczenie współrzędnych pkt C

2p: wyznaczenie równania prostej AC

3p: rozwiązanie układu
$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x \\ y = \sqrt{3}x + 16 - \sqrt{3} \end{cases}$$

4p: wyznaczenie współrzędnych punktu A

5p: wyznaczenie współrzędnych punktu B

Zadanie 15. (0-7)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 16 cm^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

I etap: $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h$

$$16 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h$$

$$h = 16 \cdot \frac{4}{a^2 \sqrt{3}}$$

$$h = \frac{64}{a^2 \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{64\sqrt{3}}{3a^2}$$

a - krawędź podstawy
 h - wysokość graniastosłupa

$$D: a \in (0, +\infty)$$

$$P(a, h) = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3ah$$

$$P(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{64\sqrt{3}}{3a^2}$$

$$P(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{64\sqrt{3}}{a}$$

II etap:

$$P'(a) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a + 64\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)' = (a^{-1})' = -a^{-2} = -\frac{1}{a^2}$$

$$P'(a) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a + 64\sqrt{3} \left(-\frac{1}{a^2}\right) = \sqrt{3}a - \frac{64\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}a^3 - 64\sqrt{3}}{a^2}$$

$$P'(a) = \frac{\sqrt{3}a^3 - 64\sqrt{3}}{a^2}$$

$$P'(a) = 0$$

$$\sqrt{3}a^3 - 64\sqrt{3} = 0$$

$$a^3 = 64$$

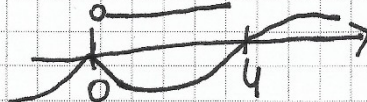
$$a = 4$$

$$P'(a) > 0$$

$$\frac{\sqrt{3}a^3 - 64\sqrt{3}}{a^2} > 0$$

$$(\sqrt{3}a^3 - 64\sqrt{3})a^2 > 0$$

$$a = 4 \quad a = 0$$



a	(0,4)	4	(4,∞)
P'	-	0	+
P	↘	min	↗

4 jest minimum funkcji $P(a)$ i jest jednocześnie najmniejszą wartością

$$a=4$$

$$h = \frac{64\sqrt{3}}{3 \cdot 4^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Pole jest najmniejsze, gdy $a=4$
 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Kryterium oceniania

- uzależnienie wysokości graniastopu od krawędzi podstawy $h = \frac{64\sqrt{3}}{3a^2}$ 1p
- wyrażenie pola powierzchni całkowitej jako funkcji jednej zmiennej $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{64\sqrt{3}}{a}$ 1p
- wyrażenie pochodnej funkcji $P'(a) = \frac{a^3\sqrt{3} - 64\sqrt{3}}{a^2}$ 1p
- wyznaczenie dziedzin funkcji P 1p
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej $a=4$ 1p
- zbadanie znaku pochodnej P i uzasadnienie, że dla $a=4$ 1p
- podanie wymiarów graniastopu $a=4$ $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 1p